Obtencion de los valores reales de las frecuencias de la escala musical como

funcion de una espiral 3D de desarrollo no uniforme.

Prologo:

En principio habria que observar que los valores que nos da Drunvalo Melchizedek en su obra El antiguo secreto de la flor de la vida, Volumen I:

Angulo	Incremento Radial desde el centro	Angulo	Incremento Radial desde el centro	Angulo	Incremento Radial desde el centro	Angulo	Incremento Radial desde el centro
0° ☆	1.0 ★						
10°	1.1	100°	1.8	190°	3.0 ★	280°	5.0 ★
20°	1.1	110°	1.9	200°	3.2	290°	5.3
30°	1.2	120° ☆	2.0 ★	210°	3.4	300°	5.6
40°	1.3	130°	2.1	220°	3.6	310°	6.0
50°	1.3	140°	2.2	230°	3.8	320°	6.3
60°	1.4	150°	2.4	240° ☆	4.0	330°	6.7
70°	1.5	160°	2.5	250°	4.2	340°	7.1
80°	1.6	170°	2.7	260°	4.5	350°	7.5
90°	1.7	180°	2.8	270°	4.7	360° ☆	8.0 ★

Angulo	0°	120°	240°	360°
Distancia desde el polo	1.0	2.0	4.0	8.0

¡una secuencia binaria!

Angulo	0°	120°	190°	280°	360°
Distancia desde el polo	1.0	2.0	3.0	5.0	8.0

¡una secuencia Fibonacci!

Definimos $\Phi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1.618$

$\rho = c^{\theta}$

Al aplicar valores concretos para un recorrido de tres octavas:

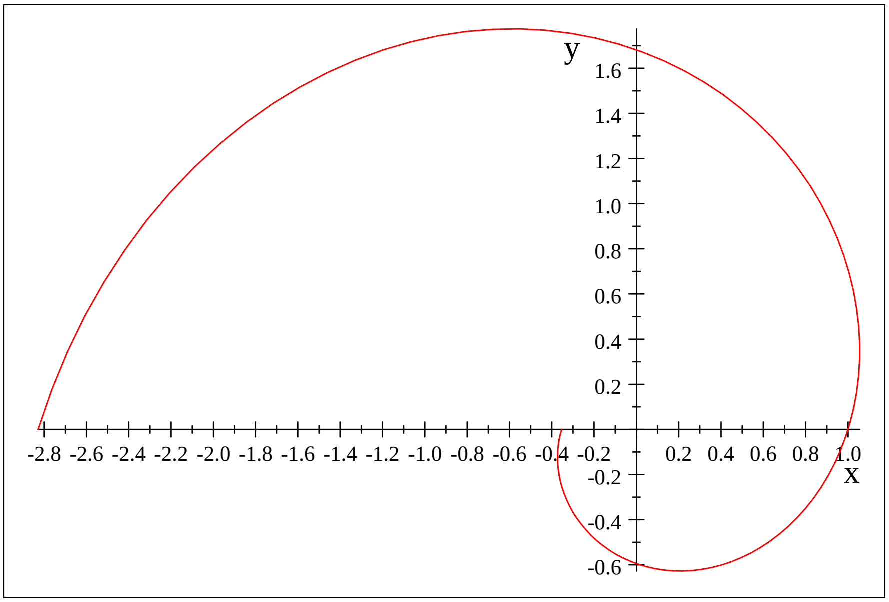
Para $\theta = 2\pi \qquad \rho = 8$

$8 = c^{2\pi}$

$c = 2^{\frac{3}{2\pi}}$

$\rho = 2^{\frac{3\theta}{2\pi}} = \sqrt[12]{2^{\frac{36\theta}{2\pi}}}$ o bien: $\rho = \sqrt[12]{2^{n}}$ siendo $n = \frac{36\theta}{2\pi}$ utilizada actualmente

con el nombre de escala musical de temperamento igual.



Desarrollo:

Basandonos en este grafico y solucionando el problema planteado en la grafica en funcion del numero de oro Φ :

Obtencion de los valores reales de las frecuencias de la escala musical como funcion de una espiral 3D de desarrollo no uniforme.

Basandonos en este grafico y solucionando el problema planteado en la grafica en funcion del numero de oro Φ :

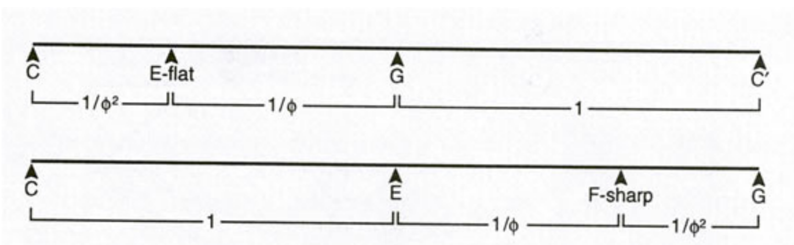


FIGURE 3. *The frequency values of these two basic series of musical tones are ordered according to the Golden Section.*

http://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/fid_911_jbt_tune.html

Tenemos:

$\frac{D\#-1}{2-G} = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = 0.381\,97$

$\frac{G-D\#}{2-G} = \frac{1}{\Phi} = 0.618\,03$

$\frac{F\#-E}{E-1} = \frac{1}{\Phi} = 0.618\,03$

$\frac{G-F\#}{E-1} = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = 0.381\,97$

Llamando u a la frecuencia de D# (re sostenido)

x a la frecuencia relativa de E (mi)

y a la frecuencia de F# (fa sostenido)

z a la frecuenciaa relativa de G (sol)

Tenemos:
$\frac{u-1}{2-z}=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2=0.381\,97$
$\frac{z-u}{2-z}=\frac{1}{\Phi}=0.618\,03$
$\frac{y-x}{x-1}=\frac{1}{\Phi}=0.618\,03$
$\frac{z-y}{x-1}=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2=0.381\,97$

Simplificando
$u-1=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(2-z)$
$z-u=\frac{1}{\Phi}(2-z)$
$y-x=\frac{1}{\Phi}(x-1)$
$z-y=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(x-1)$
Simplificando:
$u=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(2-z)+1$
$u=z-\frac{1}{\Phi}(2-z)$
$y=\frac{1}{\Phi}(x-1)+x$
$z-y=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(x-1)$

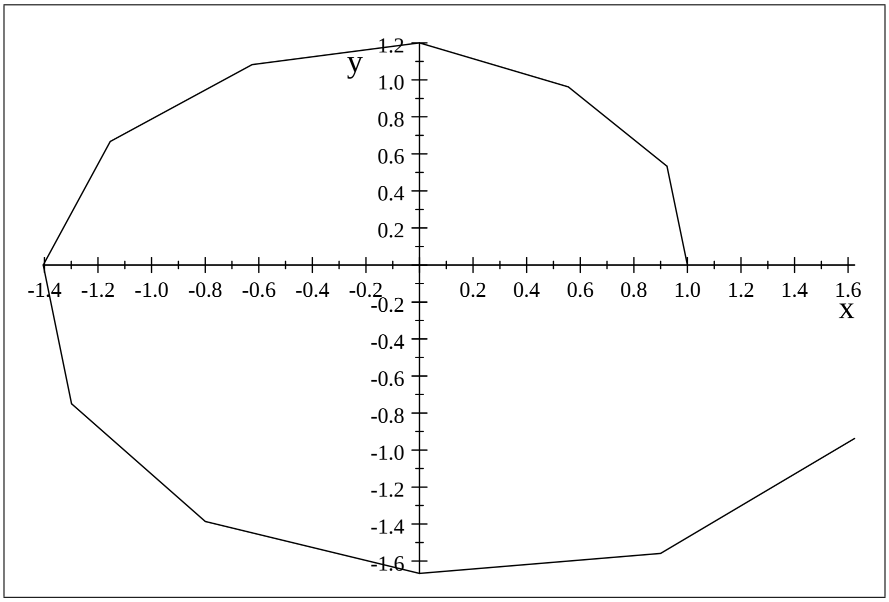
Nos da la soluciones (ver tabla)
$u=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(2-z)+1=z-\frac{1}{\Phi}(2-z)$, Solution is: $z=G=\frac{3}{2}$
$u=D\#=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(2-1.5)+1=\frac{1}{2\Phi^2}+1=2-\frac{1}{2}\Phi=1.191\,0$
Teniendo en cuenta la relacion:
$\Phi^2=\frac{1}{2-\Phi}$
$y=F\#=\frac{1}{\Phi}(1.25-1)+1.25=\frac{1}{4\Phi}+\frac{5}{4}=1.404\,5$
$1.5-\left(\frac{1}{\Phi}(x-1)+x\right)=\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2(x-1)$, Solution is: $x=E=1.25$

Con el curioso resultado de obtener valores simples para G(sol) y para E(mi) y valores racionales y relacionados con Φ, para D# y F#

Nota	frecuencia intervalos justos	resueltos
C	$\frac{1}{1}=1.0$	$\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi}=1.0$
C#	$\frac{16}{15}=1.066\,7$	
D	$\frac{10}{9}=1.111\,1$	
D#	$\frac{6}{5}=1.2$	$2-\frac{1}{2}\Phi=1.191\,0$
E	$\frac{5}{4}=1.25$	$\frac{1.5+\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi}}{2}=1.25$
F	$\frac{4}{3}=1.333\,3$	
F#....Gb	$\frac{45}{32}=1.406\,3...\frac{64}{45}=1.422\,2$	$\frac{5}{4}+\frac{1}{4\Phi}=1.404\,5$
G	$\frac{3}{2}=1.5$	$\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{2}=1.5$
G#	$\frac{8}{5}=1.6$	
a	$\frac{5}{3}=1.666\,7$	
a#	$\frac{9}{5}=1.8$	
b	$\frac{15}{8}=1.875$	
C'	$\frac{2}{1}=2.0$	$\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi}+1=2.0$

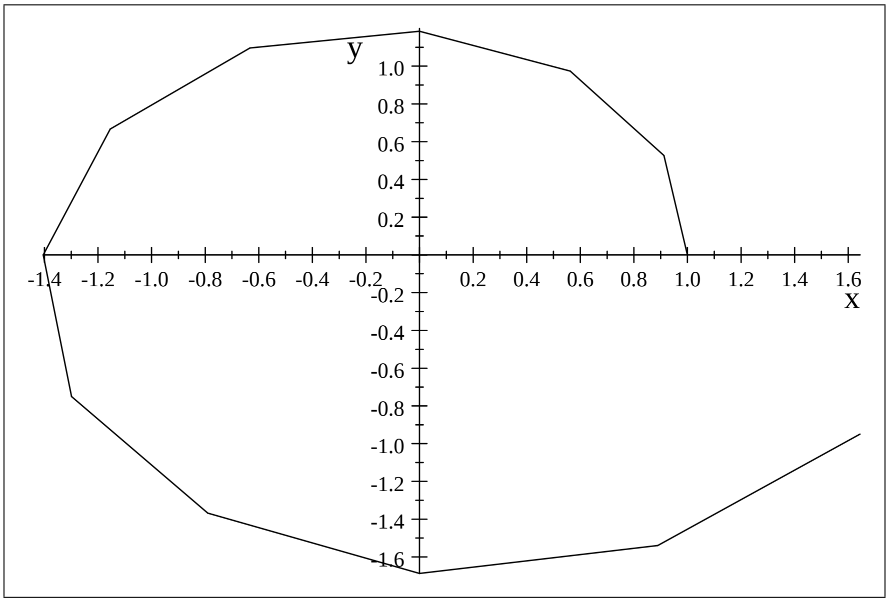
Just Intervals-f#/Gb

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.0667 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1111 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.2000 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2500 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3333 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.5000 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.6000 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6667 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.8000 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8750 & 11\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$



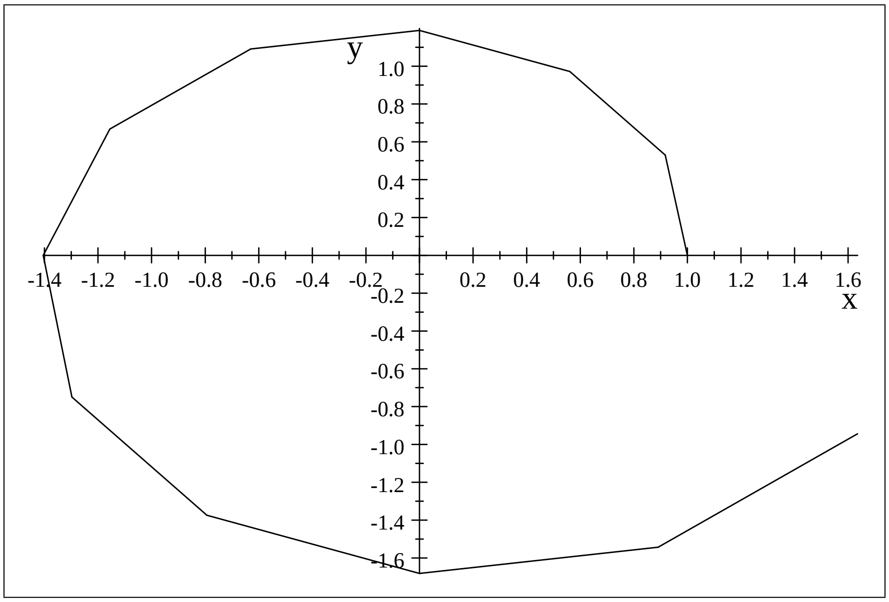
Pythagorean (True intervals)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.0535 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1250 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.1852 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2656 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3333 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.5000 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.5802 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6875 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.7778 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8984 & 11\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$



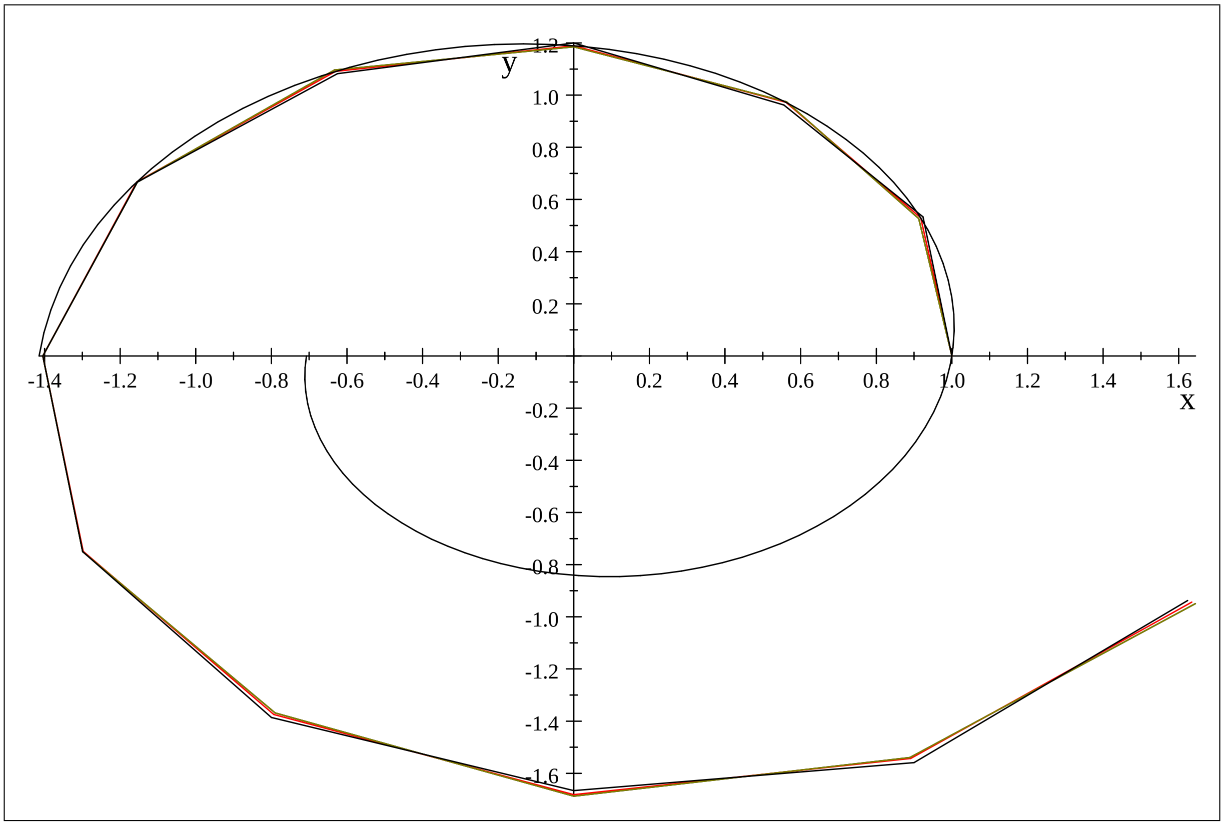
Equal Temperament

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.0595 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1225 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.1892 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2599 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3348 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.4983 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.5874 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6818 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.7818 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8877 & 11\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$



Pythagorean (True intervals)Equal TemperamentJust Intervals-f#/Gb

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.0535 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1250 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.1852 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2656 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3333 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.5000 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.5802 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6875 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.7778 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8984 & 11\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.0595 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1225 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.1892 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2599 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3348 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.4983 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.5874 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6818 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.7818 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8877 & 11\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.0667 & 1\frac{\pi}{6} \\ 1.1111 & 2\frac{\pi}{6} \\ 1.2000 & 3\frac{\pi}{6} \\ 1.2500 & 4\frac{\pi}{6} \\ 1.3333 & 5\frac{\pi}{6} \\ 1.4045 & 6\frac{\pi}{6} \\ 1.5000 & 7\frac{\pi}{6} \\ 1.6000 & 8\frac{\pi}{6} \\ 1.6667 & 9\frac{\pi}{6} \\ 1.8000 & 10\frac{\pi}{6} \\ 1.8750 & 11\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \rho = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$$



$\rho = c^{\theta}$

Al aplicar valores concretos para una octava:

Para $\theta = 2\pi \qquad \rho = 2$

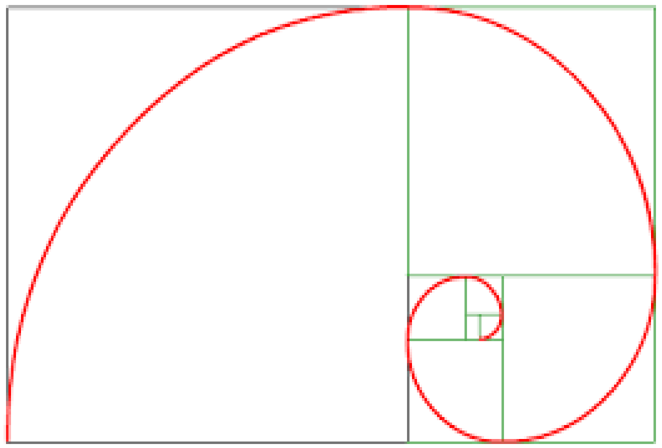
$2 = c^{2\pi}$

$c = 2^{\frac{1}{2\pi}}$

$\rho = 2^{\frac{\theta}{2\pi}}$

La conclusion de este estudio es que no se puede asisgnar una funcion continua a la frecuencia de los tonos.

Admitiendo que exista simetria respecto al centro de la escala, G, podemos agregar tres tonos mas, que son: F, a#, b.



Nota	frecuencia intervalos justos	resueltos
C	$\frac{1}{1} = 1.0$	$\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = 1.0$
C#	$\frac{16}{15} = 1.0667$	
D	$\frac{10}{9} = 1.1111$	
D#	$\frac{6}{5} = 1.2$	$2 - \frac{1}{2}\Phi = 1.1910$
E	$\frac{5}{4} = 1.25$	$\frac{1.5+\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi}}{2} = 1.25$
F	$\frac{4}{3} = 1.3333$	$2/1.5 = \frac{4}{3}$
F#....Gb	$\frac{45}{32} = 1.4063 ... \frac{64}{45} = 1.4222$	$\frac{5}{4} + \frac{1}{4\Phi} = 1.4045$
G	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{2} = 1.5$
G#	$\frac{8}{5} = 1.6$	
a	$\frac{5}{3} = 1.6667$	
a#	$\frac{9}{5} = 1.8$	$1.5 * (2 - \frac{1}{2}\Phi) = 1.7865$
b	$\frac{15}{8} = 1.875$	$1.5 * 1.25 = 1.875$
C‘	$\frac{2}{1} = 2.0$	$\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} + 1 = 2.0$

– –

Anecxo:
Ejemplo de espiral aurea:

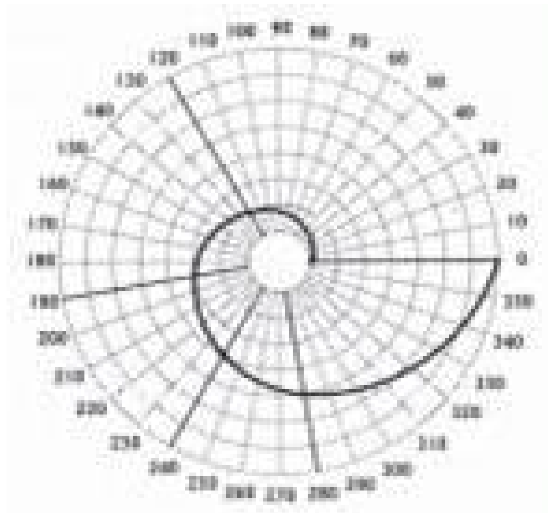


Fig. 8-23. Golden Mean spiral plotted on a polar graph.

5.- La escala del Temperamento Igual

Antes de entrar en la descripción y la estructura de las escalas de Intervalos Justos tanto antiguas como más recientes, vamos a introducir la escala moderna de 12 notas del Temperamento Igual (también llamada 12-tet), la cual es el sistema de afinación utilizado hoy en día en la mayoría de pianos. Esta escala habitualmente se da por supuesta de uso universal en los intrumentos de teclado, pero resulta importante saber que no existía en la práctica musical común con instrumentos hasta principios del siglo XX. Según William Sethares [1] "muchos músicos y compositores occidentales modernos incluso desconocen que existen alternativas. Esto no sorprende, ya que la mayoría de libros sobre escalas y harmonía musical se focalizan exclusivamente en el 12-tet, y muchas escuelas musicales ofrecen pocos cursos sobre música fuera del 12-tet, a pesar de que una porción significativa del repertorio musical histórico fuera escrito antes de que el 12-tet fuese común".

La idea del Temperamento Igual es muy simple: se fuerza que las 12 notas de la escala cromática suenen separadas una misma distancia. Es decir, la escala se divide en 12 semitonos iguales. Si el semitono tiene un cociente S y queremos alcanzar la octava después de 12 semitonos, la ecuación que se debe resolver es S12=2, de la cual el cociente de frecuencias de cada semitono tiene que ser la raíz doceava de dos, S=21/12=1.05946... Por lo tanto el cociente de frecuencias entre notas sucesivas ya no resulta una fracción (número racional) sino un número real, irracional. En el dominio logarítmico la longitud de un semitono es exactamente 1200·log2(21/12)=(1200/12)·log2(2)=100 cents. Siguiendo nuestra notación gráfica, la Figura 23 muestra la escala 12-tet así como la escala diatónica que contiene en su interior:

Tan sólo tres de las doc notas de la escala 12-tet están relacionadas con una de las medias introducidas en la sección previa. Se pueden deducir fácilmente si uno se da cuenta de que la media geométrica de dos intervalos es equivalente a la media aritmética de sus valores correspondientes en cents. Así pues, si dividimos la octava en dos mitades (en cents) obtenemos el tritono, y si volvemos a dividir por dos cada una de las dos mitades, obtenemos la 3^a Menor y la 6^a Mayor. A partir de aquí se necesita dividir cada nuevo intervalo en tres partes para obtener las ocho notas restantes, lo cual equivale a realizar la raíz cúbica en el dominio lineal. Según Maria Renold "esto puede explicar por qué la calidad de los doce intervalos de esta escala es completamente diferente. Los tritonos, terceras menores y sextas mayores se experimentan como genuinas, mientras que las quintas, cuartas, terceras mayores, sextas menores segundas mayores y las dos séptimas suenan falsas [..] es decir falsificadas al oido humano. Este hecho es comunmente reconocido [2, p.43]."

Drunvalo_Melchizedek_El_Antiguo_Secreto_de_la_Flor_de_la_Vida__Volumen_I

http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/proporci%C3%B3n-en-las-escalas-musicales#6

https://arcaneknowledgeofthedeep.files.wordpress.com/2014/02/floweroflife.pdf

https://www.google.es/search?q=golden+mean+spiral+merkaba&oq=golden+mean+spi&aqs=chrome.3.6
8

http://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/fid_911_jbt_tune.html

https://books.google.es/books?id=_NG9v8h7-LIC&pg=PA176&lpg=PA176&dq=do+c+256+herzios+d&

Espiral no modulada en z:

Note/Interval		Just Intervals	RATIO	CENTS	"Pythagorean" (True intervals)	RATIO	CENTS	Equal Temperament	RATIO	CENTS
Tonic	C	1	1.0000	0.00	1	1.0000	0.00	1	1.0000	0.00
Minor 2nd	c#	16/15	1.0667	111.73	256/243	1.0535	90.22	$2^{1/12}$	1.0595	100.00
Major 2nd	D	10/9	1.1111	182.40	9/8	1.1250	203.91	$2^{1/6}$	1.1225	200.00
Minor 3rd	e#	6/5	1.2000	315.64	32/27	1.1852	294.13	$2^{1/4}$	1.1892	300.00
Major 3rd	E	5/4	1.2500	386.31	81/64	1.2656	407.82	$2^{1/3}$	1.2599	400.00
Perfect 4th	F	4/3	1.3333	498.04	4/3	1.3333	498.04	$2^{5/12}$	1.3348	500.00
Augmented 4th	f#	45/32	1.4063	590.22	729/512	1.4238	611.73	√2	1.4142	600.00
Diminished 5th	Gb	64/45	1.4222	609.78	1024/729	1.4047	588.27			
Perfect 5th	G	3/2	1.5000	701.96	3/2	1.5000	701.96	$2^{7/12}$	1.4983	700.00
Minor 6th	g#	8/5	1.6000	813.69	128/81	1.5802	792.18	$2^{2/3}$	1.5874	800.00
Major 6th	A	5/3	1.6667	884.36	27/16	1.6875	905.87	$2^{3/4}$	1.6818	900.00
Minor 7th	a#	9/5	1.8000	1017.60	16/9	1.7778	996.09	$2^{5/6}$	1.7818	1000.00
Major 7th	B	15/8	1.8750	1088.27	243/128	1.8984	1109.78	$2^{11/12}$	1.8877	1100.00
Octave	C'	2	2.0000	1200.00	2	2.0000	1200.00	2	2.0000	1200.00

http://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/proporci%C3%B3n-en-las-escalas-musicales

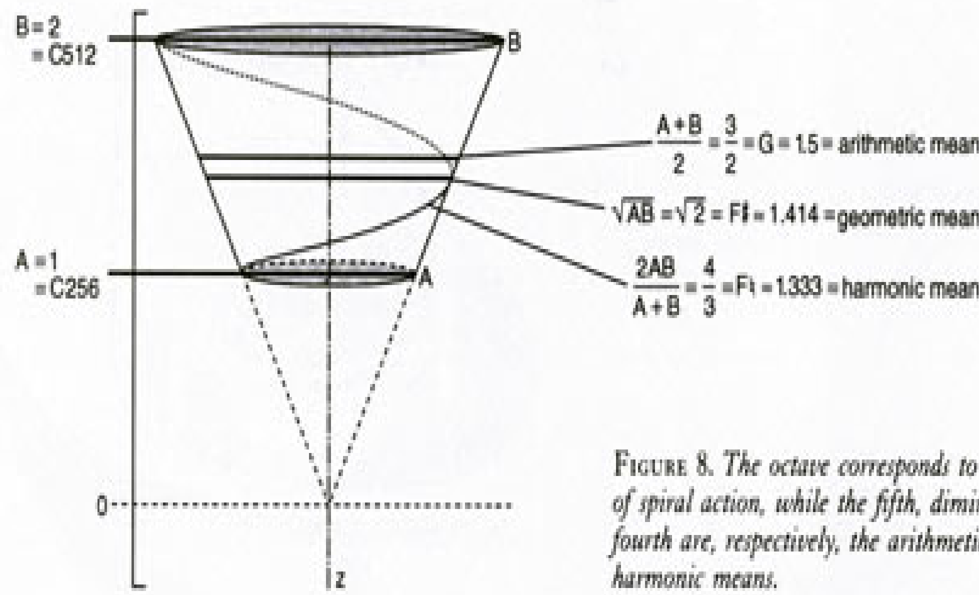


FIGURE 8. *The octave corresponds to one full revolution of spiral action, while the fifth, diminished fifth, and fourth are, respectively, the arithmetic, geometric, and harmonic means.*

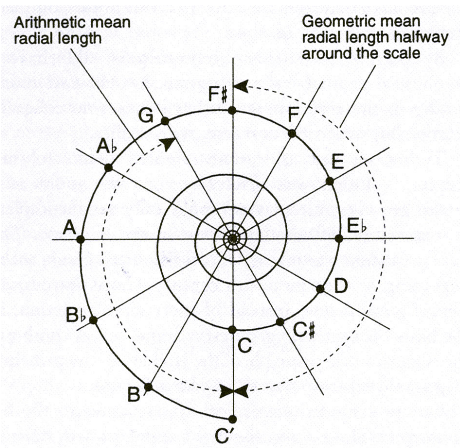
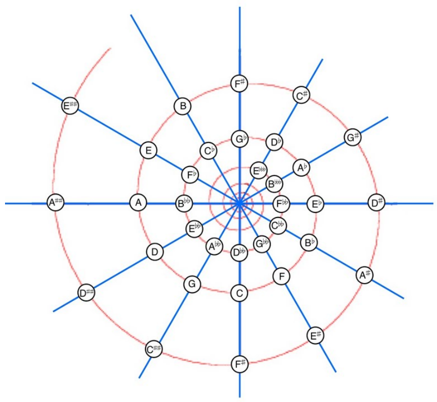


FIGURE 9. *The self-similar conical spiral projected onto a plane, showing the intervals of the equal-tempered scale.*

Pythagorean Tuning

Spiral of Perfect Fifths (3:2)



Equal-Temperament

Circle of Fifths $(\sqrt[12]{2})^7$

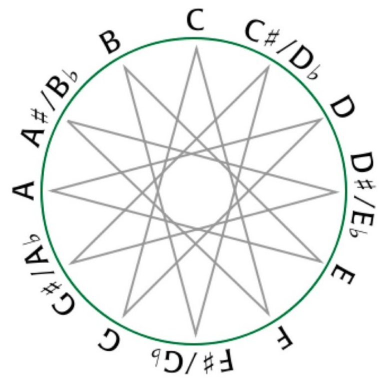
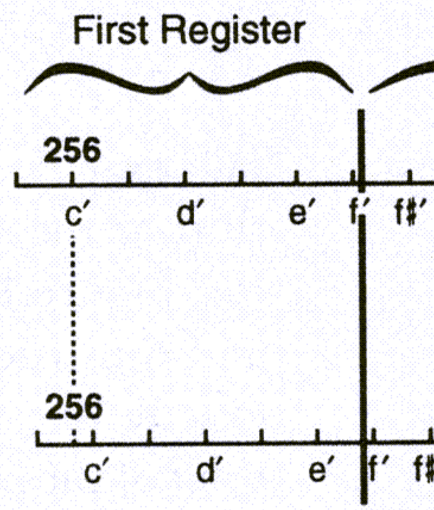


FIGURE 12. *At A=432 or below (top scale), the register shift occurs between F and F♯; at A=440 or above (bottom scale), it is forced downward to between E and F.*



ESCALA DIATONICA

Nombre	do	re	mi	fa	sol	la	si	do	re
Letra	C	D	E	F	G	A	B	C'	D'
Frecuencia (Hz)	256	288	320	341	384	426	480	512	576
Acorde (tónica)	4		5		6				
Acorde (dominante)					4		5		6
Acorde (subdominante)				4		5		6	